Dualidad en Espacios de Banach

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \text{máx}\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \\ \|f\| &= \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned} \tag{1}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \text{máx}\,\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \\ \|f\| &= \sup\,\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned} \tag{1}$$

Para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \\ \|f\| &= \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned} \tag{1}$$

Para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X.Además usaremos de vez en cuando la notación:

$$\langle x | x^* \rangle = x^*(x) \quad (x^* \in X^*,\ x \in X).$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \qquad (1) \\ \|f\| &= \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned}$$

Para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X.Además usaremos de vez en cuando la notación:

$$\langle x | x^* \rangle = x^*(x) \quad (x^* \in X^*,\ x \in X).$$

Expresión en la que tanto x como x^* pueden ser la variable.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \\ \|f\| &= \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned} \tag{1}$$

Para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X.Además usaremos de vez en cuando la notación:

$$\langle x | x^* \rangle = x^*(x) \quad (x^* \in X^*,\ x \in X).$$

Expresión en la que tanto x como x^* pueden ser la variable.

Si X es un espacio normado, el segundo dual de X, es el espacio de Banach $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$, que se llama **bidual** de X, cuyos elementos suelen representarse de forma genérica por x^{**} y cuya norma está definida por

$$\|x^{**}\| = \sup\{|x^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \min\{m \geqslant 0 : |x^{**}(x^*)| \leqslant m\|x^*\|\}$$

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *“funcional de evaluación en x”*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *"funcional de evaluación en x"*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad $\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| = |x^*(x)| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ nos dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$.

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *"funcional de evaluación en x"*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad $\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| = |x^*(x)| \leqslant \|x\| \|x^*\|$ nos dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$.De hecho, se tiene la igualdad, pues por (1) tenemos que

$$\|J(x)\| = \sup\{|J(x)(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \|x\|$$

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *"funcional de evaluación en x"*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad $\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| = |x^*(x)| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ nos dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$.De hecho, se tiene la igualdad, pues por (1) tenemos que

$$\|J(x)\| = \sup\{|J(x)(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \|x\|$$

Por tanto, la aplicación $J : X \to X^{**}$ que a cada $x \in X$ hace corresponder el funcional de evaluación en x, $J(x) \in X^{**}$, que, evidentemente, es lineal, es una isometría lineal que se llama **la inyección canónica del espacio normado X en su bidual**.

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *"funcional de evaluación en x"*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad $\left|\big(J(x)\big)(x^*)\right| = |x^*(x)| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ nos dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$.De hecho, se tiene la igualdad, pues por (1) tenemos que

$$\|J(x)\| = \sup\{|J(x)(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \|x\|$$

Por tanto, la aplicación $J : X \to X^{**}$ que a cada $x \in X$ hace corresponder el funcional de evaluación en x, $J(x) \in X^{**}$, que, evidentemente, es lineal, es una isometría lineal que se llama **la inyección canónica del espacio normado X en su bidual**.

La inyección canónica J identifica totalmente a X con un subespacio de X^{**}, simbólicamente: $X \equiv J(X)$.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es reflexivo*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo*.
- *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es reflexivo*.
- *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo*.
- *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.
- Teniendo en cuenta que *un espacio reflexivo es separable si, y sólo si, su dual es separable*, se deduce que ℓ_1 no es reflexivo.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo*.
- *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.
- Teniendo en cuenta que *un espacio reflexivo es separable si, y sólo si, su dual es separable*, se deduce que ℓ_1 no es reflexivo.

Proposición. Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach completo $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

- *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo*.
- *Todo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es reflexivo*.
- *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.
- Teniendo en cuenta que *un espacio reflexivo es separable si, y sólo si, su dual es separable*, se deduce que ℓ_1 no es reflexivo.

Proposición. Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, su dual X^* es reflexivo.

Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos. Definimos

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0 \ \ \forall x \in A\} \\ {}^{\perp}B &= \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0 \ \ \forall x^* \in B\} \end{aligned}$$

$A^{\perp}$ se llama **anulador** de A en X^*, y ${}^{\perp}B$ se llama **anulador** de B en X.

Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos. Definimos

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in A\right\} \\ {}^{\perp}B &= \left\{x \in X : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x^* \in B\right\} \end{aligned}$$

$A^{\perp}$ se llama **anulador** de A en X^*, y ${}^{\perp}B$ se llama **anulador** de B en X.

Puesto que

$$\begin{aligned} \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in A\right\} = \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathrm{Lin}(A)\right\} = \\ = \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in \overline{\mathrm{Lin}}(A)\right\} \end{aligned}$$

Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos. Definimos

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in A \right\} \\ {}^{\perp}B &= \left\{ x \in X : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x^* \in B \right\} \end{aligned}$$

$A^{\perp}$ se llama **anulador** de A en X^*, y ${}^{\perp}B$ se llama **anulador** de B en X.

Puesto que

$$\begin{aligned} \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in A \right\} &= \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathrm{Lin}(A) \right\} = \\ &= \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \;\; \forall x \in \overline{\mathrm{Lin}}(A) \right\} \end{aligned}$$

se verifica que $A^{\perp} = \left(\mathrm{Lin}(A)\right)^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{Lin}}(A)\right)^{\perp}$.

Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos. Definimos

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall x \in A\right\} \\ {}^{\perp}B &= \left\{x \in X : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall x^* \in B\right\} \end{aligned}$$

$A^{\perp}$ se llama **anulador** de A en X^*, y ${}^{\perp}B$ se llama **anulador** de B en X.

Puesto que

$$\begin{aligned} \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall x \in A\right\} = \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall x \in \mathrm{Lin}(A)\right\} = \\ = \left\{x^* \in X^* : \left\langle x \middle| x^* \right\rangle = 0 \ \ \forall x \in \overline{\mathrm{Lin}}(A)\right\} \end{aligned}$$

se verifica que $A^{\perp} = \big(\mathrm{Lin}(A)\big)^{\perp} = \big(\overline{\mathrm{Lin}}(A)\big)^{\perp}$.

Es claro que $A \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ y que $B \subset \left({}^{\perp}B\right)^{\perp}$. También es claro que si
$A_1 \subset A_2 \subset X$ y
$B_1 \subset B_2 \subset X^*$ entonces $A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}$, ${}^{\perp}B_2 \subset {}^{\perp} B_1$.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^{\perp}$ y $B^{\perp}$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^{\perp}B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

(e) Si X es reflexivo entonces $\overline{\mathrm{Lin}}(B) = \left(^\perp B\right)^\perp$.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

(e) Si X es reflexivo entonces $\overline{\mathrm{Lin}}(B) = \left(^\perp B\right)^\perp$.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

(e) Si X es reflexivo entonces $\overline{\mathrm{Lin}}(B) = \left(^\perp B\right)^\perp$.

Proposición. Todo subespacio cerrado de un espacio normado reflexivo es reflexivo.

Proposición. Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker J(x)$$

$$^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \{x \in X : \langle x | x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*$$

(b) $^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$. De manera más sugerente

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. $^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

(e) Si X es reflexivo entonces $\overline{\mathrm{Lin}}(B) = \left(^\perp B\right)^\perp$.

Proposición. Todo subespacio cerrado de un espacio normado reflexivo es reflexivo.

Proposición. c_0 no es reflexivo y, por tanto, ℓ_∞ no es reflexivo.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son “duales” uno de otro.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son “duales” uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son “duales” uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

(a) $M^* \equiv X^*/M^\perp$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^\perp) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son “duales” uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

(a) $M^* \equiv X^*/M^\perp$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^\perp) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Si M es cerrado, entonces $(X/M)^* \equiv M^\perp$. Concretamente, si $\pi : X \to X/M$ es la aplicación cociente, la aplicación $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$ dada por

$$\Psi(f) = f \circ \pi \qquad (f \in (X/M)^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son "duales" uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

(a) $M^* \equiv X^*/M^\perp$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^\perp) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Si M es cerrado, entonces $(X/M)^* \equiv M^\perp$. Concretamente, si $\pi : X \to X/M$ es la aplicación cociente, la aplicación $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$ dada por

$$\Psi(f) = f \circ \pi \qquad (f \in (X/M)^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son “duales” uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

(a) $M^* \equiv X^*/M^\perp$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^\perp) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Si M es cerrado, entonces $(X/M)^* \equiv M^\perp$. Concretamente, si $\pi : X \to X/M$ es la aplicación cociente, la aplicación $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$ dada por

$$\Psi(f) = f \circ \pi \qquad (f \in (X/M)^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Sean X e Y espacios normados. Dado un operador $T \in L(X,Y)$ podemos definir un operador $T^* : Y^* \to X^*$ por

$$\langle x \,|\, T^* y^* \rangle = \langle Tx \,|\, y^* \rangle \quad (y^* \in Y^*, x \in X)$$

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son "duales" uno de otro.

Proposición. Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.

(a) $M^* \equiv X^*/M^\perp$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^\perp) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Si M es cerrado, entonces $(X/M)^* \equiv M^\perp$. Concretamente, si $\pi : X \to X/M$ es la aplicación cociente, la aplicación $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$ dada por

$$\Psi(f) = f \circ \pi \qquad (f \in (X/M)^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Sean X e Y espacios normados. Dado un operador $T \in L(X,Y)$ podemos definir un operador $T^* : Y^* \to X^*$ por

$$\langle x | T^* y^* \rangle = \langle Tx | y^* \rangle \quad (y^* \in Y^*, x \in X)$$

Es decir, $T^* y^* = y^* \circ T$ por lo que $T^* y^* \in X^*$ y $\|T^* y^*\| \leqslant \|T\| \|y^*\|$ de donde se sigue que $T^* \in L(Y^*, X^*)$ y $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. El operador T^* se llama **transpuesto** de T.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(c) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(c) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(c) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Dado $T \in L(X,Y)$, su transpuesto $T^* \in L(X^*,Y^*)$, y podemos considerar su transpuesto, $(T^*)^* = T^{**} \in L(X^{**},Y^{**})$.

Proposición. Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(c) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Dado $T \in L(X,Y)$, su transpuesto $T^* \in L(X^*,Y^*)$, y podemos considerar su transpuesto, $(T^*)^* = T^{**} \in L(X^{**},Y^{**})$.Como las respectivas inyecciones canónicas J_X y J_Y identifican X e Y con subespacios en X^{**} e Y^{**} respectivamente, es natural preguntarse si en cierto sentido es posible ver a T^{**} como un "extensión" de T. El siguiente diagrama pone de manifiesto lo que cabe esperar.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_X"'] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\
X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**}
\end{tikzcd}$$

Efectivamente, se verifica que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^\perp \quad \text{y} \quad \ker T = {}^\perp T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

Corolario. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Entonces:

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

Corolario. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Entonces:

(a) T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, lo es T^*.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*, Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

Proposición. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

Corolario. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Entonces:

(a) T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, lo es T^*.

(b) T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si, lo es T^*.